Introduction

Le but du présent document est d'expliquer pourquoi lorsqu'on résout une EDO d'ordre 2 :

$$ay'' + by' + cy = q$$

en utilisant la variation de la constante (avec y_1 et y_2 deux solution linéairement indépendantes de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$) on pose le système

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{1}{a}q(x). \end{cases}$$

Considérons donc, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $q \colon I \to \mathbb{R}$ et y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.

Equation d'ordre n ou système d'ordre 1, c'est la même chose

Remarquons que trouver une solution $y \colon I \to \mathbb{R}$ de

$$ay'' + by' + cy = q \tag{E}$$

est équivalent à trouver une solution $u = (u_1, u_2) \colon I \to \mathbb{R}^2$ de

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = \frac{1}{a}\left(q - bu_2 - cu_1\right), \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad u' = Mu + Q \tag{S}$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{q}{a} \end{bmatrix}.$$

En effet, si y est une solution de (E), en posant $u = (u_1, u_2) := (y, y')$, on a

$$\begin{aligned} u_1' &= y' = u_2 \\ u_2' &= (y')' = y'' \overset{(E)}{=} \frac{1}{a}\left(q - by' - cy\right) = \frac{1}{a}\left(q - bu_2 - cu_1\right) \end{aligned}$$

et donc u est une solution de (S).
Inversément, si $u = (u_1, u_2) \colon I \to \mathbb{R}^2$ est une solution de (S), posant $y := u_1$, on a $y' = u_1' = u_2$, donc $u_2' = y''$ et

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= au_2' + bu_2 + cu_1 \\ &\overset{(S)}{=} a\frac{1}{a}\left(q - bu_2 - cu_1\right) + bu_2 + cu_1 = q, \end{aligned}$$

et donc y est une solution de (E).
Plus généralement, une équation différentielle d'ordre n est toujours équivalente à un système d'ordre 1 à n équations :

$$E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u_1' - u_2 &=& 0 \\ u_2' - u_3 &=& 0 \\ &\vdots& \\ u_{n-1}' - u_n &=& 0 \\ E(x, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n, u_n') &=& 0 \end{array} \right.$$

Variation de la constante dans le système d'ordre 1 à 2 équations.

On essaie de résoudre

$$ay'' + by' + cy = q$$

pour ceci, on a déjà y_1 et y_2 deux solution linéairement indépendantes de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.
Traduisons ceci en système : Si $\overline{u} = (\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (y_1, y_1')$ et $\overline{v} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2) = (y_2, y_2')$, alors, on peut vérifier que

$$\overline{u}' = M\overline{u} \qquad \text{et} \qquad \overline{v}' = M\overline{v}.$$

(Les arguments sont donnés dans la preuve qu'une solution de (E) donne une solution de (S) dans le cas particulier où $q = 0$.)
Cherchons une solution de la forme $u(x) = C_1(x)\overline{u}(x) + C_2(x)\overline{v}(x)$, où $C_i \colon I \to \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
u'(x) =& C_1'(x)\overline{u}(x) + C_1(x)\overline{u}'(x) + C_2'(x)\overline{v}(x) + C_2(x)\overline{v}'(x)\\
=& C_1'(x)\overline{u}(x) + C_2'(x)\overline{v}(x) + C_1(x)M\overline{u}(x) + C_2(x)M\overline{v}(x)\\
=& C_1'(x)\overline{u}(x) + C_2'(x)\overline{v}(x) + M\underbrace{\left(C_1(x)\overline{u}(x) + C_2(x)\overline{v}(x)\right)}_{=u(x)}\\
=& C_1'(x)\overline{u}(x) + C_2'(x)\overline{v}(x) + Mu(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que u soit une solution, il faut et il suffit que $C_1'(x)\overline{u}(x) + C_2'(x)\overline{v}(x) = Q(x)$, c'est-à-dire (en écrivant cette équation composante par composante)

$$\begin{cases}
C_1'(x)\overline{u}_1(x) + C_2'(x)\overline{v}_1(x) = 0\\[2ex]
C_1'(x)\overline{u}_2(x) + C_2'(x)\overline{v}_2(x) = \frac{1}{a}q(x).
\end{cases}$$

en utilisant que $(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (y_1, y_1')$ et que $\overline{v} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2) = (y_2, y_2')$, on déduit que ce système est en fait

$$\begin{cases}
C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0\\[2ex]
C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{1}{a}q(x).
\end{cases}$$

qui est exactement le système qu'on a posé.